Exercice 46.

Le but de l'exercice est de démontrer que le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré n sur $\mathbb{F}_p$ est donné par

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)p^d$$

où μ est la fonction de Möbius.

Soit $K(p,j)$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré j sur $\mathbb{F}_p$. Nous cherchons le cardinal $I(p,n)$ de cet ensemble.

1. *Montrer que*
$$X^{p^n} - X = \prod_{d|n}\ \prod_{Q\in K(p,d)} Q.$$

2. *En déduire que*
$$p^n = \sum_{d|n} dI(p,d).$$

3. *Déduire le résultat grâce à la formule d'inversion de Möbius.*

Correction.

1. *Montrons déjà que*